Universidad Nacional de Ingeniería — P.A. 2014-1
Facultad de Ingeniería Mecánica — 11/07/14
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

El límite elástico de los metales depende en gran parte del tamaño del grano. Para estos metales la relación entre el límite elástico y el diámetro medio del grano d viene dada por la ecuación de Hall-Petch:

$$\sigma_y = \sigma_0 + \frac{k}{\sqrt{d}}$$

Los siguientes datos son los resultados de medidas del diámetro medio del grano y el límite elástico:

d(mm)	0.005	0.009	0.016	**0.025**	**0.040**	**0.062**	0.085	0.110
σ_y (Mpa)	205	150	135	**97**	**89**	**80**	70	67

a) **(2.5p)**Utilice una curva de ajuste para calcula la constante σ_0 y k en la ecuación de Hall Petch para este material. Utilice las constantes para calcular, mediante la ecuación, el límite elástico de un material cuyo tamaño de grano es 0.05 mm.

b) **(1.0p)**Utilice interpolación lineal para calcular el límite elástico de un material con un tamaño de grano de 0.05 mm.

c) **(1.0p)**Estime el error de la interpolación lineal y comente su respuesta con respecto al valor obtenido en a).

d) **(0.5p)** Realice los comandos necesarios en Matlab para realizar el ajuste o regresión del caso a). Use la siguiente cabecera: function [sigma, k]=ajuste(x,y)

Problema 2

Sea la siguiente función: $f(x) = x\, e^{-x^2}$. Se desea hallar el área bajo la curva de f comprendida entre a=1 y b= ∞.

a) **(1.5p)** Realice el cambio de variable **x=1/t** y aproxime la integral mediante la fórmula de Simpson abierta tomando 8 particiones.

b) **(1.5p)** Aproxime mediante la integral $I = \int_1^b f(x)dx$, elija el menor valor entero de b, talque $|f(b)| \le 10^{-20}$ y aproxime la integral mediante la fórmula de Simpson 1/3 tomando 6 particiones.

c) **(0.5p)** Determine el error para a) y b) y comente sus resultados

d) **(1.5p)** Escriba un programa MATLAB para la parte a) y b).

Problema 3

Considerando el modelo matemático que representa el enfriamiento de un objeto: $\dot{T} = K(T - T_m)$, donde T es la temperatura promedio del objeto, T_m es la temperatura ambiente y K es la constante de proporcionalidad.
Al inicio una plancha metálica tiene una temperatura de 100°C y a los 2 segundos se enfría a 80°C, si el medio ambiente se encuentra a 14 °C determine lo siguiente:

a) **(1.5p)** Usando el método de Euler, calcule el valor de K, usando un h=2.
b) **(3.0p)** Usando el K del ítem anterior y h=1, determine el valor de T a 2 segundos, mediante el método de Runge-Kutta de orden 2, con su respectivo error.
c) **(0.5p)** Indique la orden completa en Matlab que permite calcular la función T(t) considerando un K= -0.1 y T(0)=100.

Problema 4

a) (**4p**) Usando diferencias finitas, resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + x^2y - 1 = 0$$

y(0) = 1 ; y(1) = 2 ; h = 0.2

b) (**1p**)Escribir un programa en Matlab que compare los resultados obtenidos en a) con los valores reales mediante un gráfico.

Los Profesores

Solución 1

a) k=12.2603 Mpa (mm)-$^{1/2}$

σ_0 =28.2938 Mpa

σ_y (0.05)=83.12 Mpa

<table>
<tr><td rowspan="3">A =[ones(8,1) 1./sqrt(x)]

1.0000 14.1421
1.0000 10.5409
1.0000 7.9057
1.0000 6.3246
1.0000 5.0000
1.0000 4.0161
1.0000 3.4300
1.0000 3.015</td><td>M =A^{T}A
8.0000 54.3745
54.3745 475.5958</td><td>Mc=B
c=M\B</td></tr>
<tr><td>B =A^{T}y
893.0
7369.43</td><td>c=28.293
12.26038</td></tr>
<tr><td colspan="2">σo=c(2) = 12.26038
k=c(1) = 28.293</td></tr>
</table>

b) b) $p_1(x)$=-409.09 x+105.36

σ_y (0.05) ≈p_1(0.05)=84.9091

c) $p_2(x)$= 3357.90x^2 -751.+ 113.69

σ_y (0.05) ≈p_2(0.05)==84.75061Mpa

Errror de la interpolación lineal e1(0.05)= abs(p2(0.05)-p1(0.05))= 0.16 más puntos.
Nos dará mejor aproximación.

d) function [sigma, k]=ajuste(x,y)

```
c= polyfit(1./sqrt(x),y,1);
k=c(1);
sigma=c(2);
```

Solución 2

a) x=1/t dx=-1/t^{2}dt

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t^3} e^{-1/t^2}\, dt = \int_0^1 F(t)dt$$

$$I_1 = \frac{4h}{3}\left(2F\left(\frac{1}{8}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) + 2F\left(\frac{3}{8}\right)\right) + \frac{4h}{3}\left(2F\left(\frac{5}{8}\right) - F\left(\frac{3}{4}\right) + 2F\left(\frac{7}{8}\right)\right)$$

$$I_1 = 0.1787$$

b) cumple para b=7

$$I_2 = \int_1^7 f(x)dx$$

$$I_2 = \frac{h}{3}\left(f(1) + 4f(2) + 2f(3) + 4f(4) + 2f(5) + 4f(6) + 2f(7)\right)$$

$$I_2 = 0.1717$$

c) Calculo de error

Ie=1/2e=0.1839

E1=/0.1839-0.1787/=0.0052

E2=/0.1839-0.1717/=0.0122

Simpson abierta es ligeramente más preciso

d) Programa MATLAB

```
clc
clear all
s='x*exp(-x^2)'
Ie=double(int(s,1,Inf))  %   0.1839
% x=1/t   dx=-1/t^2
% Cuadratura de Simpson Abierta
ss='1/t^3*exp(-(1/t)^2)'
ff=inline(ss)
h=1/8
Ia=4*h/3*(2*ff(1/8)-ff(1/4)+2*ff(3/8));
Ib=4*h/3*(2*ff(5/8)-ff(3/4)+2*ff(7/8));
I1=Ia+Ib        %  0.1787
e1=abs(I1-Ie)   %  0.0052
% Cuadratura de Simpson 1/3
% cumple para b=7
f=inline(s)
h=1
I2=h/3*(f(1)+4*f(2)+2*f(3)+4*f(4)+2*f(5)+4*f(6)+f(7))
%   0.1717
e2=abs(I2-Ie)  %   0.0122
```

Solución 3

a) Ts=Ti+h*K(Ti-Tm)

Ts=T(2)=80
Ti=T(0)=100
Tm=14
h=2
K=(Ts-Ti)/(h*(Ti-Tm))
Reemplazando K=-0.1163

b) T=f(t,T)=f(T)='-0.1163*(T-14)';
Usando las fórmulas de RK4, dos veces se tiene.
k1=h*f(Ti)
k2=h*f(Ti+k1)
Ts=Ti+(k1+k2)/2
La primera es T(1)= 90.58
La segunda es T(2)= 82.19
El error seria=0.19

c) `dsolve('DT=-0.1*(T-14)','T(0)=100','t')`

Solución 4

a) y’’ = – 2xy’ – x^2y + 1

donde: p(x) = –2x ; q(x) = – x^2 ; r(x) = 1

Luego:

Ai = 1+ (0.2/2)(-2x) = 1 – 0.2x
Bi = – (0.04(–x^2)+2) = 0.04x^2 – 2
Ci = 1 – (0.2/2)(-2x) = 1 + 0.2x
Di = 0.04(1) = 0.04

Realizando la matriz:

$$\begin{bmatrix} -1.9984 & 1.04 & 0 & 0 \\ 0.92 & -1.9936 & 1.08 & 0 \\ 0 & 0.88 & -1.9856 & 1.12 \\ 0 & 0 & 0.84 & -1.9744 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.92 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ -2.28 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se obtiene:

y1 = 1.2133 ; y2 = 1.4468 ; y3 = 1.6742 ; y4 = 1.8671

parte b)

```
y0=1, y5=2, x0=0, x1=0.2, x2=0.4, x3=0.6, x4=0.8, x5=1, h=0.2
A=[-1.9984 1.04 0 0; 0.92 -1.9936 1.08 0; 0 0.88 -1.9856 1.12; 0 0 0.84 -1.9744 ]
B=[-0.92; 0.04; 0.04; -2.28]
y=A\B
y=[y0 y' y5]
X=0:0.2:1
Y=dsolve('D2y+2*x*Dy+(x^2)*y-1=0','y(0)=1','y(1)=2', 'x')
Z=subs(Y,X)
plot(X,y,X,Z)
legend('aproximado','exacto')
```